En général, les lois de la physique sont exprimées par des équations différentielles (ordinaires ou aux d.p.)

- $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$ en mécanique newtonienne
- équations de Lagrange / Hamilton en mécanique analytique
- $-i\hbar \partial_t \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} + V\right)\psi$ équation de Schroedinger en mécanique quantique etc.

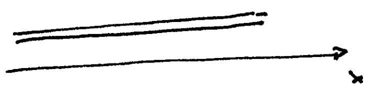
......

analyse de Fourier
distributions
fonctions de Green

$\Big\}$ technologie de résolution (EDO/EDP linéaires)

<u>Exemple - équation de la chaleur</u>

(E) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



- fil isolé de l'environnement, chauffé non-uniformement
- $u(x,t) \to$ température en point x à l'instant t

(CI) • $u(x,0) = u_0(x) \to$ distribution initiale de température

Pour résoudre, considérons la <u>transformation de Fourier</u> de la fonction $u(x,t)$ par rapport à x :

$$u(x,t) \longmapsto \hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\, u(x,t)\, dx$$

Nous intégrons donc par rapport à x, mais introduisons à la place une nouvelle variable ω. Quelle équation vérifie $\hat{u}(\omega,t)$?

On a $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\left\{\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\right\} dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x,t)\, dx$$

$$- \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \partial_{xx} u(x,t)\, dx$$ $\leftarrow$ intégrons 2 fois par parties en supposant $u(x \to \pm\infty) = 0$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x,t)\, dx}_{\hat{u}(\omega,t)} + \lambda\omega^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x,t)\, dx}_{\hat{u}(\omega,t)} = 0$$

On obtient donc une équation différentielle <u>ordinaire</u> :

$$\frac{d\hat{u}(\omega,t)}{dt} + \lambda\omega^2\,\hat{u}(\omega,t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{u}(\omega,t=0)\,e^{-\lambda\omega^2 t} = e^{-\lambda\omega^2 t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\,u_0(x)\,dx$$

Nous avons pu décrire l'évolution de $\hat{u}(\omega,t)$ complètement

- l'intérêt principal de TF en physique $\to$ équations deviennent simples et solubles
- il y a aussi l'intérêt technologique $\to$ traitement de signaux (image, son, video)

Pour terminer la résolution de notre problème initiale, il nous faut trouver la <u>transformation inverse</u> :

$$\hat{u}(\omega,t) = TF(u(x,t)) \iff u(x,t) = TF^{-1}(\hat{u}(\omega,t))$$

pour pouvoir expliciter la formule

$$u(x,t) = TF^{-1}\left\{ e^{-\lambda\omega^2 t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x'}\,u_0(x')\,dx' \right\}$$

<u>Théorème</u> : $$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\,e^{+i\omega x}\,d\omega$$

"Démonstration" :

i). $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x'} f(x')\,dx'\right)d\omega =$$

on change l'ordre d'intégration

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-x')}\,d\omega\right)}_{\text{notons } \delta(x-x')} dx' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,\delta(x-x')\,dx' \overset{?}{=} f(x)$$

ii). Lorsqu'on intègre directement, $\delta(x-x')$ n'a aucun sens : $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-x')}\,d\omega = \left.\frac{e^{i\omega(x-x')}}{2\pi i\,(x-x')}\right|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \text{indéfini}$$

Nous allons faire à la physicienne : on considère $\delta(s)$ comme $$\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega s-\alpha\omega^2}\,d\omega = \lim_{\alpha\to 0}\delta_\alpha(s)$$

↑ cette intégrale est calculable

Effectivement :

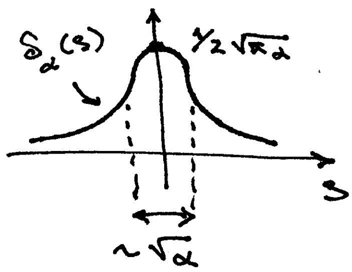
$$\delta_\alpha(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(\omega^2 - 2\cdot\frac{is}{2\alpha}\omega + \left(\frac{is}{2\alpha}\right)^2\right) + \alpha\left(\frac{is}{2\alpha}\right)^2}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(\omega - \frac{is}{2\alpha}\right)^2}\cdot e^{-s^2/4\alpha}\, d\omega =$$

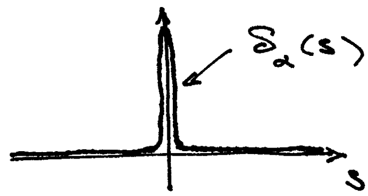
$$= \frac{1}{2\pi}\, e^{-s^2/4\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\omega^2}\, d\omega = \left| \begin{array}{l} \omega = \frac{\omega'}{\sqrt{\alpha}} \\ d\omega = \frac{d\omega'}{\sqrt{\alpha}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, e^{-s^2/4\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega')^2}\, d\omega'}_{= \sqrt{\pi}} = \frac{e^{-s^2/4\alpha}}{2\sqrt{\pi\alpha}}.$$

iii). A quoi ressemble $\delta_\alpha(s)$?



$\xrightarrow{\alpha \to 0}$



<u>Lemme:</u> L'aire au-dessous du graphe de $\delta_\alpha(s)$ est constante (indépendante de α) et $= 1$.

$$\blacktriangledown \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2/4\alpha}}{2\sqrt{\pi\alpha}}\, ds = \left| \begin{array}{l} s = 2\sqrt{\alpha}\, s' \\ ds = 2\sqrt{\alpha}\, ds' \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s'^2}\, ds'}_{= \sqrt{\pi}} = 1 \blacktriangledown$$

iv). Revenons à notre intégrale : on veut montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{-(x'-x)^2/4\alpha}}{2\sqrt{\pi\alpha}}\, dx' \stackrel{?}{=} f(x)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,\frac{e^{-(x'-x)^2/4\alpha}}{2\sqrt{\pi\alpha}}\, dx'$$

Vu le graphe de $\delta_\alpha(s)$, la valeur de l'intégrale est déterminée par les valeurs de $f(x')$ près de $x'=x$. Développons $f(x')$ en série de Taylor autour de $x'=x$:

$$f(x') \simeq f(x) + f'(x)\,(x'-x) + \frac{f''(x)}{2!}\,(x'-x)^2 + \dots$$

et substituons dans l'intégrale :

— > —

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x) + f'(x)(x'-x) + \dots \right] \frac{e^{-(x'-x)^2/4\alpha}}{2\sqrt{\pi\alpha}}\, dx' = \left| \begin{matrix} x'-x = x'' \\ dx' = dx'' \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x) + f'(x)\, x'' + \frac{f''(x)}{2} (x'')^2 + \dots \right] \frac{e^{-(x'')^2/4\alpha}}{2\sqrt{\pi\alpha}}\, dx'' = \left| \begin{matrix} x'' = 2\sqrt{\alpha} \\ dx'' = 2\sqrt{\alpha} \end{matrix} \right.$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x) + f'(x) \cdot 2\sqrt{\alpha}\, x''' + \frac{f''(x)}{2} (2\sqrt{\alpha})^2 (x''')^2 + \dots \right] \frac{e^{-(x''')^2}}{\sqrt{\pi}}\, dx''' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ f(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x''')^2} dx'''}_{= \sqrt{\pi}} + f'(x) \cdot 2\sqrt{\alpha} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x''' e^{-(x''')^2} dx'''}_{= 0} + \right.$$

$$\left. + \frac{f''(x)}{2} \cdot (2\sqrt{\alpha})^2 \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x''')^2 e^{-(x''')^2} dx'''}_{\text{constante indépendante de } \alpha} + \dots \right\}$$

Donc, dans la limite $\alpha \to 0$ il ne reste que le 1er terme et on obtient

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, \delta_\alpha(x'-x)\, dx' = f(x)$$

Remarques:

Représentations de la "fonction" δ :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega = \lim_{\alpha \to 0} \frac{e^{-x^2/4\alpha}}{2\sqrt{\pi\alpha}}$$

Propriétés:

1). $\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, \delta(x'-x)\, dx' = f(x)$

2). $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$

3). $\delta(f(x)) = \sum_j \frac{1}{|f'(x_j)|} \delta(x - x_j)$

$\delta(x)$ est l'exemple principal d'une distribution.

Elle n'a pas de sens comme fonction, mais les fonction "normales" peuvent être intégrées avec $\delta(x)$.

On revient à l'équation de chaleur et on applique la formule pour la TF inverse:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega,t)\, e^{i\omega x}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\left(e^{-\lambda\omega^2 t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x'}\, u_0(x')\, dx'\right) d\omega =$$

on échange l'ordre de l'intégration

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\omega^2 t + i\omega(x-x')}\, d\omega\right)}_{= G(x-x',t)} u_0(x')\, dx'$$

$G(x-x',t) \leftarrow$ fonction de Green d'équation de chaleur

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x',t)\, u_0(x')\, dx'$$

FG donne la solution (sous forme d'une intégrale) q.q.s. les conditions initiales (fonction $u_0(x)$)!

Transformons l'expression de FG:

$$G(s,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t\,\omega^2 + i\omega s}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t\left(\omega^2 - 2\cdot\frac{is}{2\lambda t}\omega + \left(\frac{is}{2\lambda t}\right)^2\right) + \lambda t\left(\frac{is}{2\lambda t}\right)^2} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot e^{-s^2/4\lambda t}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t\left(\omega - \frac{is}{2\lambda t}\right)^2} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, e^{-s^2/4\lambda t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t\,\omega^2}\, d\omega = \left|\begin{array}{l}\omega = \frac{\omega'}{\sqrt{\lambda t}}\\ d\omega = \frac{d\omega'}{\sqrt{\lambda t}}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{-s^2/4\lambda t}}{\sqrt{\lambda t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega'^2}\, d\omega' = \frac{e^{-s^2/4\lambda t}}{2\sqrt{\pi\lambda t}}.$$

Finalement, on obtient la solution de notre pb de départ.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x',t)\, u_0(x')\, dx'$$

avec

$$G(x-x',t) = \frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4\lambda t}}}{2\sqrt{\pi\lambda t}}.$$

Interprétation de FG (lien avec les distributions).

Dans la formule

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x',t)\, u_0(x')\, dx'$$

posons $u_0(x') = \delta_0(x'-y)$, alors

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x',t)\, \delta(x'-y)\, dx' =$$

$$= G(x-y,t)$$

Donc: la FG est la solution de notre équation qui correspond aux conditions initiales de la forme "source ponctuelle".

Généralisations

- plus de dimensions : $\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \Delta u$
- autres équations linéaires (équation d'ondes, de Laplace / Helmholtz, etc.).